

DOI: 10.7652/xjtuxb201506021

纤维多孔金属的流阻率分形模型研究

陈卫华^{1,2}, 陈天宁¹, 王小鹏¹, 张超¹

(1. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安; 2. 兰州理工大学机电工程学院, 730050, 兰州)

摘要: 为了揭示纤维多孔金属吸声材料的流阻率与其孔隙率、孔直径以及孔的弯曲度等主要几何参数之间的变化规律,给纤维多孔金属吸声材料的结构设计提供基本的理论指导,提出了一种流阻率分形模型。通过对纤维多孔金属的孔隙结构进行分形处理,结合材料内部空气流体学分析,首先获得了流经纤维多孔金属材料截面总的空气流量 Q 的表达式,该表达式是最大平均孔径 $\lambda_{\max}$ 、曲线分形维数 D_T 和孔面积分形维数 D_f 的函数,其次结合纤维多孔金属吸声材料流阻率的公式,获得了流阻率分形模型。模型理论计算值与实验测试值的最大偏差为 13.9%,最小偏差为 7.6%,平均偏差为 10.6%,验证了该理论模型的可靠性。分析结果表明:随着孔隙率 Φ 的增大,纤维多孔金属吸声材料的流阻率减小; Φ 和 D_T 一定时,流阻率随着 D_f 的增大而减小; Φ 和 D_f 一定时,流阻率随着 D_T 的增大而增大。与通过实验确定流阻率的经验公式相比,文中所建流阻率分形模型能够反映材料的几何参数与流阻率之间的变化规律,为纤维多孔金属吸声材料的微观结构设计提供了一定的依据。

关键词: 流阻率;分形模型;曲线分形维数;孔面积分形维数

中图分类号: TB535 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2015)06-0132-06

A Fractal Model of Flow Resistivity for Fibrous Porous Metals

CHEN Weihua^{1,2}, CHEN Tianning¹, WANG Xiaopeng¹, ZHANG Chao¹

(1. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. College of Mechano-Electronic Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: A fractal model of flow resistivity is proposed to investigate the relations of flow resistivity with some geometric parameters of fibrous porous metals such as porosity, pore diameter and tortuosity, and to obtain a theoretical guidance for the design of sound-absorption materials. First of all, a mathematical expression of the flow Q is obtained based on the theory of fractal geometry and fluid mechanics, and the expression is a function of the maximal mean diameter of pore $\lambda_{\max}$, the fractal dimension D_T of tortuosity and the pore area fractal dimension D_f . Then, the fractal model of flow resistivity is acquired in terms of the flow resistivity formula. The maximum error, the minimum error and the mean error between experimental results and calculation results from the model are 13.9 %, 7.6 % and 10.6 %, respectively, which verifies the accuracy of the model. The calculation results show that the flow resistivity decreases as the porosity Φ increases. When the porosity Φ and the tortuosity fractal dimension D_T are fixed, the flow resistivity decreases as the pore area fractal dimension D_f increases. However, when the porosity Φ and the pore area fractal dimension D_f are fixed, the flow resistivity increases as the tortuosity fractal dimension D_T increases. The relations between the flow resistivity and the

收稿日期: 2014-11-23。 作者简介: 陈卫华(1976—),男,在职博士生,兰州理工大学讲师;王小鹏(通信作者),男,副教授。

基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(2011CB610306);陕西省自然科学基金资助项目(2015JM5154)。

网络出版时间: 2015-03-23

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20150323.1713.001.html>

geometric parameters are revealed more clearly by the fractal flow resistivity model than by the empirical model. It can be concluded that the results provide a reliable and theoretical guidance for the design of sound-absorption materials.

Keywords: flow resistivity; fractal model; tortuosity fractal dimension; pore area fractal dimension

烧结纤维多孔金属具有多功能复合特性,例如超轻、高强韧、耐撞击、高比强度、高比刚度、高效散热或隔热以及吸声性能优良等^[1],其结构通常由金属骨架和内部介质(通常为空气)组成,金属骨架由一定数量的金属丝按层交错排列高温烧结形成,内部具有复杂的开孔或闭孔结构。与传统的非金属吸声材料相比,纤维多孔金属材料能够耐高温高压,因此可以用作极端恶劣工况下的吸声降噪材料。

声波在纤维多孔金属介质中的传播主要考虑两个方面:一是孔隙填充介质中波的传播;二是多孔介质骨架内的弹性波传播。本文假设金属骨架为刚性体,只考虑声波在孔隙空气中的传播。Allard 等将纤维材料作为等效流体研究,指出流阻是反映多孔材料吸声性能的一个重要参数^[2];Delany 等的研究表明,声波在多孔介质中的传播和衰减主要由孔隙中空气的流阻决定,通过空气流阻就能预测多孔介质的吸声性能^[3]。Bies 等对多孔金属纤维材料的流阻进行了测量,获得了相关实验结果^[4]。上述文献研究工作表明,纤维多孔金属的流阻率是决定其吸声性能优劣的一个重要声学参数。

纤维多孔金属介质的内部孔隙结构呈现无规则排列,孔的分布是杂乱无章的无序结构,使得纤维多孔金属吸声材料的设计难度很大。分形几何学以非规则的几何形态为研究对象,可以处理自然界和非线性系统中不光滑的具有自相似性且没有特征长度的形状和现象。因此,本文以分形几何理论为基础,对纤维多孔金属材料的微观孔隙结构进行描述,建立材料的流阻率与分形维数之间的声学模型。

1 分形理论简介

分形几何学产生于 20 世纪 70 年代末 80 年代初,是一门以非规则几何形态为研究对象的新兴学科^[5]。分形的概念是由美国学者 Mandelbrot 于 1975 年首先提出来的。在自然界中,大量的研究对象例如粗糙表面、海岸线、山脉以及岛屿等,都是无序和不规则的,它们不能用欧式几何进行准确描述,这些对象被称为分形,它们的维数不再是整数而是分数,称为分形维数。这些分形对象满足下式^[6]

$$M(L) \sim L^{D_f} \quad (1)$$

式中: M 可以是线的长度、平面面积、立方体体积或物体质量; L 是测量尺度; D_f 是分形维数。式(1)表示分形对象的局部和整体具有精确的自相似性。然而,自然界具有精确自相似性的物体几乎没有,绝大部分研究对象都是统计自相似,因此本文中提到的分形维数均是指统计分形维数。

2 纤维多孔金属的分形研究

纤维多孔金属材料内部孔隙结构随着纤维直径、长度以及纤维的相对排列方式而异,实际烧结而成的纤维多孔金属,其纤维的形状与堆积均是无序的。图 1 为纤维多孔金属的宏观和微观结构图。

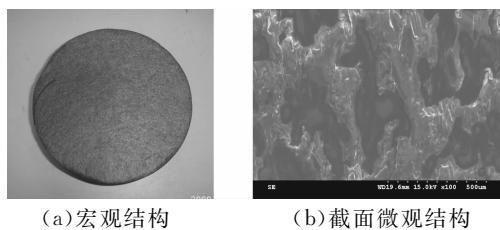


图 1 纤维多孔金属

纤维多孔金属内部具有不同尺寸的孔,可以看作由一簇具有不同截面积的弯曲毛细管组成,假设毛细管的直径为 λ ,沿着声波传播方向的长度为 $L_t(\lambda)$,参照毛细管长度为 L_0 ,则根据 Wheatcraft 等的研究^[7]可知,纤维多孔金属内部毛细管的直径和长度满足如下分形关系

$$L_t(\lambda) = \lambda^{1-D_T} L_0^{D_T} \quad (2)$$

式中: $L_t(\lambda)$ 为毛细管的长度; λ 为毛细管的直径; L_0 为参照毛细管长度; D_T 为曲线分形维数, $1 < D_T < 2$ 。

对于纤维多孔金属材料内部结构来说,除了毛细管的弯曲特性以外,孔直径大于 λ 的毛细管通道的数量也是一个重要参数。考虑垂直于声波传播方向的一个横截面上分布着直径从 $\lambda_{\min}$ 到 $\lambda_{\max}$ 的大小不一的孔,则直径大于 λ 的毛细管通道数量可以表示为^[8]

$$N(L \geq \lambda) = (\lambda_{\max}/\lambda)^{D_f} \quad (3)$$

式中: N 为毛细管通道数量; $\lambda_{\max}$ 为毛细管的最大直径。考虑从 λ 到 $\lambda + d\lambda$ 这一段孔的分布,孔的数量为

$$-dN = D_f \lambda_{\max}^{D_f} \lambda^{-(D_f+1)} d\lambda \quad (4)$$

式中: D_f 为孔面积分形维数。式(4)中负号表示毛细管通道的数量与孔的直径成反比关系。

3 纤维多孔金属的流阻率模型

3.1 空气流量

声波通过纤维多孔金属材料传播时,受到流阻率、声压以及空气的黏性系数等影响,而流阻率与纤维多孔金属的几何结构即孔隙率、毛细管通道的曲线分形维数以及孔面积分形维数相关。下面将首先推导流经材料横截面的空气流量表达式,然后根据达西定律^[9]来推导纤维多孔金属的流阻率分形模型。

流经纤维多孔材料空气的总流量为所有毛细管通道空气流量的总和,因此首先考虑单根毛细管通道的空气流量,根据 Hagen-Poiseuille 方程^[10],流经单根毛细管通道的空气流量表达式为

$$q(\lambda) = g_q \frac{\Delta P}{L_i(\lambda)} \frac{\lambda^4}{\mu} \quad (5)$$

式中: μ 为空气黏性系数; ΔP 为声压差; g_q 为孔形状因子。

总的空气流量 Q 可以通过对截面孔直径从 $\lambda_{\min}$ 到 $\lambda_{\max}$ 范围内的流量进行积分获得^[11],联立式(2)、(4)和(5),可得

$$Q = - \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} q(\lambda) dN(\lambda) = g_q \frac{\Delta P}{\mu L_0^{D_T}} \frac{D_f}{3 + D_T - D_f} \cdot \lambda_{\max}^{3+D_T} \left[1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)^{D_f} \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)^{3+D_T-2D_f} \right] \quad (6)$$

式中: $1 < D_T < 2$, $1 < D_f < 2$, 所以 $3 + D_T - 2D_f > 0$ 。根据纤维多孔金属的分形特征,其孔径尺寸应该满足 $\lambda_{\min}/\lambda_{\max} \sim 10^{-2}$, $(\lambda_{\min}/\lambda_{\max})^{D_f} = 0$ ^[11], 因此, $0 < (\lambda_{\min}/\lambda_{\max})^{3+D_T-D_f} < 1$ 。式(6)又可以写成

$$Q = g_q \frac{\Delta P}{\mu L_0^{D_T}} \frac{D_f}{3 + D_T - D_f} \lambda_{\max}^{3+D_T} \quad (7)$$

上式即为声波入射纤维多孔金属时空气流经纤维多孔介质的总流量表达式。

3.2 流阻率分形模型

根据达西定律,单位时间内流体流经多孔介质的总流量为

$$Q = A \bar{v} \quad (8)$$

式中: A 为空气流经截面的面积; $\bar{v}$ 为空气平均流速。纤维多孔金属材料的流阻率是声波在单位长度上的声压差与空气平均流速的比值,流阻率表达式为^[2]

$$\sigma = \Delta P / (\bar{v} l) \quad (9)$$

将式(7)、(8)代入(9),可得

$$\sigma = \frac{\mu A L_0^{D_T} (3 + D_T - D_f)}{g_q D_f \lambda_{\max}^{3+D_T} l} \quad (10)$$

通常情况下,为了便于计算,我们取 $L_0 = l$, 因此式(10)又可以写为

$$\sigma = \frac{\mu A L_0^{D_T-1} (3 + D_T - D_f)}{g_q D_f \lambda_{\max}^{3+D_T}} \quad (11)$$

从式(11)中可以看出,流阻率 σ 为分形维数 D_T 、 D_f 以及材料结构参数 A 、 L_0 和 $\lambda_{\max}$ 的函数。假设毛细管通道是直的,即 $D_T = 1$, 则式(11)又可以写成

$$\sigma = \mu A (4 - D_f) / (g_q \lambda_{\max}^4 D_f) \quad (12)$$

上式表明当声波通过直的纤维多孔金属毛细管通道时,流阻率是孔面积分形维数 D_f 和孔的最大直径 $\lambda_{\max}$ 的函数,并且跟孔的最大尺寸的4次方成反比。

4 流阻率相关参数的计算

4.1 纤维多孔金属最大平均孔径 $\lambda_{\max}$ 的计算

纤维多孔金属材料可以看作由纤维束组成,而纤维束由纤维丝聚集形成,入射声波在纤维束之间的孔隙传播,如图2所示。本文利用三角形孔隙近似表征纤维多孔金属内部的微观孔隙结构,纤维束呈三角形排列形成孔隙,取一个三角形结构单元进行分析。

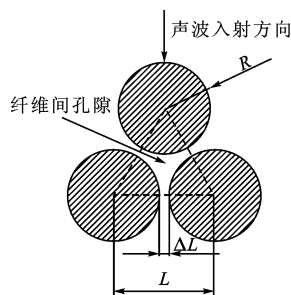


图2 纤维束间孔隙示意图

对于图2中所示三角形结构单元,孔隙率为

$$\Phi = (A' - \pi R^2 / 2) / A' \quad (13)$$

式中: A' 为三角形单元总面积; R 为纤维束的半径。 A' 的表达式为

$$A' = \pi R^2 / [2(1 - \Phi)] \quad (14)$$

而最大孔隙面积 $A'_{p,\max}$ 可以表示为

$$A'_{p,\max} = \pi R^2 \Phi / [2(1 - \Phi)] \quad (15)$$

将三角形结构单元之间的孔隙近似成圆形孔隙结构,则 $A'_{p,\max}$ 又可以表示成

$$A'_{p,\max} = \pi d_{\max}^2 / 4 \quad (16)$$

式中: $d_{\max}$ 为孔隙最大直径。将式(16)代入式(15),得到最大孔隙直径 $d_{\max}$ 的表达式为

$$d_{\max} = R[2\Phi/(1 - \Phi)]^{1/2} \tag{17}$$

式中: Φ 为三角形结构单元的孔隙率。声波在实际入射时,不仅要穿过纤维束之间的中心孔隙,而且还要穿过两个相邻的纤维束之间的狭缝,则孔隙最大平均直径还要考虑狭缝的大小, ΔL 的表达式为

$$\Delta L = R[(2\pi)^{1/2} 3^{-1/4} (1 - \Phi)^{-1/2} - 2] \tag{18}$$

同时考虑纤维束之间的中心孔隙和相邻两个纤维束之间的狭缝,则单元结构孔隙的最大平均直径 $\lambda_{\max}$ 近似表示为^[11]

$$\lambda_{\max} = (d_{\max} + \Delta L)/2 \tag{19}$$

4.2 分形维数 D_T 和 D_f

下面采用盒计数方法来确定分形维数 D_T 和 D_f 的值。

4.2.1 曲线分形维数 D_T 对于纤维多孔金属来说,其内部孔结构非常复杂,声波不能沿着直线向前传播。因此,计算声波传播的流阻率就需计算声波传播的毛细管通道的曲线分形维数 D_T 。由于纤维多孔金属内部声波传播路径类似于各向异性介质中的弯曲流道^[7],其分形维数可以利用盒计数法来进行计算。图 3 所示为纤维多孔金属介质中任意 3 条声波传播路径,假定声波从左向右传播。

利用分形软件 FractalFox 采用盒计数法分别对图 3 中 3 条声波预传播路径曲线分形维数 D_T 进行计算,结果如图 4 所示。

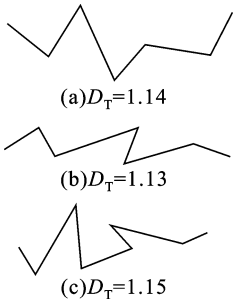


图 3 声波在纤维多孔金属内的预传播路径

4.2.2 孔面积分形维数 D_f 对于纤维多孔金属孔面积分形维数的计算,本文同样采取盒计数法利用分形软件 FractalFox 进行计算。首先取纤维多孔金属垂直于声波入射方向的一个微小截面,然后利用电子扫描显微镜获得该截面的微观结构图,接着选取边长为 L 的盒子计算不同 L 值覆盖截面的盒子个数 $N(L)$,再以 $\ln L$ 为横坐标, $\ln N(L)$ 为纵坐标描出点 $(\ln L, \ln N(L))$,最后由这些数据点的拟合线的斜率便可以估算出孔面积分形维数 D_f 。

下面分别对纤维多孔金属的 3 种试样进行孔面积分形维数 D_f 的计算,表 1 为试样参数。

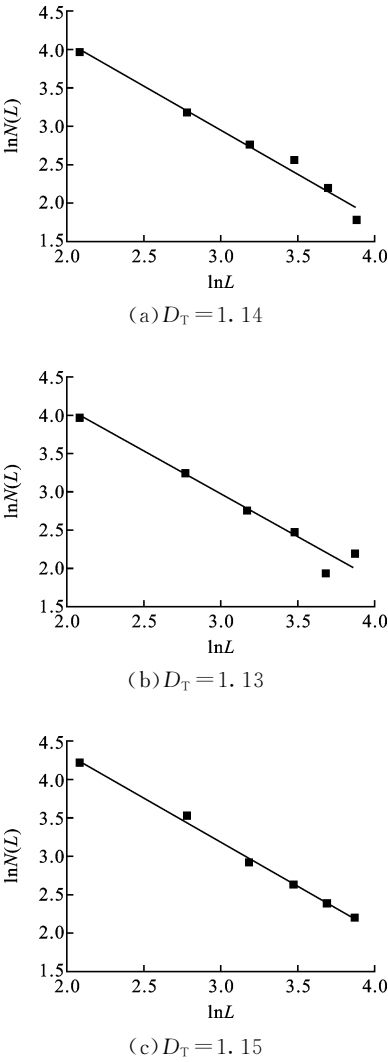


图 4 3 条声波预传播路径的曲线分形维数 D_T

表 1 纤维多孔金属试样参数

试样 编号	丝径 $d/\mu\text{m}$	孔隙率 $\Phi/\%$	试样厚度 L_0/mm	试样直径 D/mm
1	50	80	25	50
2	50	85	25	50
3	50	90	25	50

图 5 为 3 种试样的微观结构图,放大倍数为 100 倍。针对 3 种试样,取盒计数法中盒子尺寸为 3 ~ 70 mm,步长为 10 mm,取自然对数,计算结果如图 6 所示。

5 模型预测结果分析

为了验证本文流阻率分形模型的可靠性,分别将 3 种试样的模型预测结果与文献[12]中流阻率实验测试值进行了对比,相关参数为:空气黏性系数 μ 为 $1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ (18 $^{\circ}\text{C}$);样品长度 L_0 为 $2.5 \times$

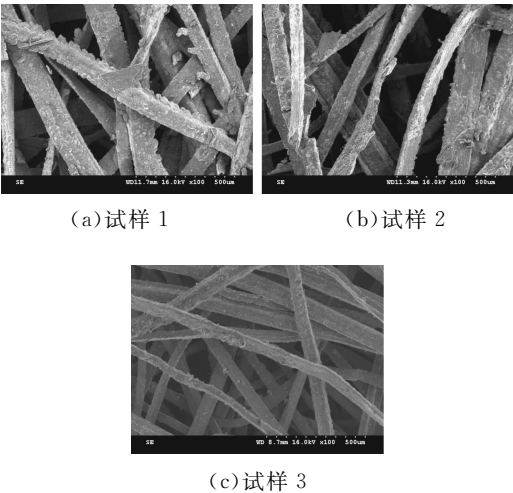


图 5 纤维多孔金属的微观结构

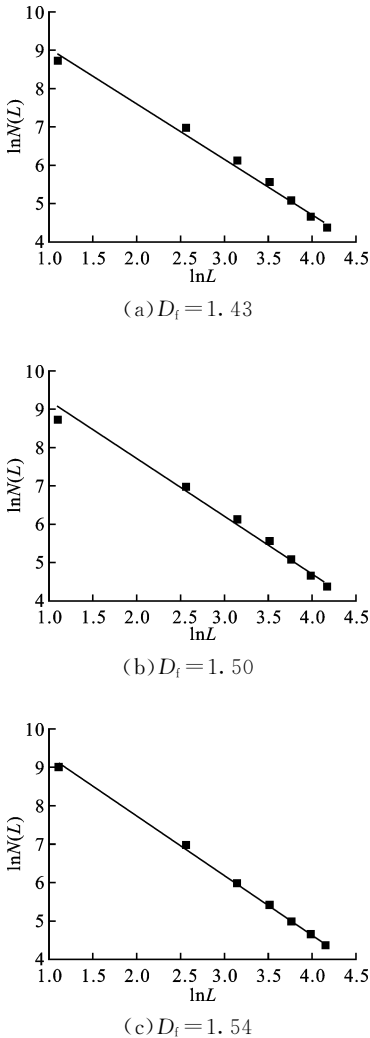


图 6 3 种纤维多孔金属试样的孔面积分形维数 D_f

10^{-2} m; 曲线分形维数 D_T 为 1.14; 孔面积分形维数 D_f 为 1.4; 纤维束半径 R 为 3.6×10^{-4} m; 试样 1、试样 2 和试样 3 的孔形状因子 g_q 取为 1.11。图 7 给出了孔隙率分别为 80%、85% 和 90% 的 3 种纤维多

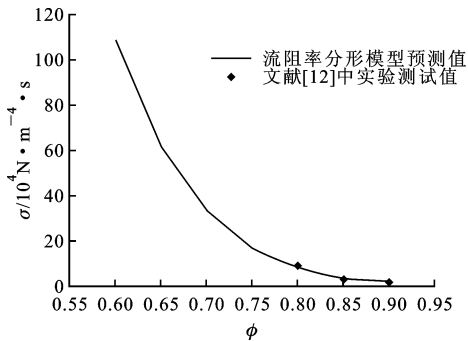


图 7 流阻率随孔隙率的变化

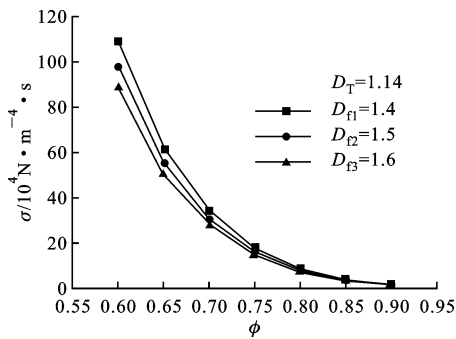
孔金属试验样品的流阻率随孔隙率的变化曲线。表 2 中 σ_{cal} 为流阻率计算值, σ_{exp} 为流阻率测试值, 由表 2 可见, 3 种样品流阻率的相对偏差分别为 13.9%、7.6% 和 10.4%, 理论计算结果与实验结果吻合得比较好。但是, 本文流阻率分形模型是以三角形孔隙近似表征纤维多孔金属材料内部的微观孔结构, 尚存在一定误差, 后续研究将进一步考虑对纤维多孔金属材料的真实微观结构进行表征, 逐步提高模型的估计精度。

表 2 流阻率实验结果和计算结果

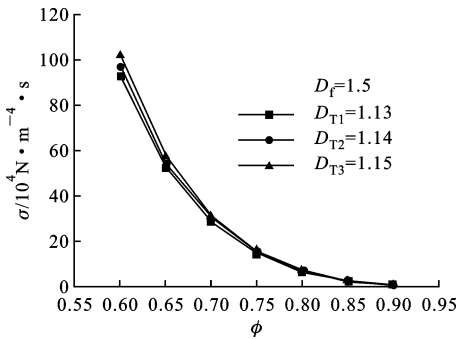
试样 编号	$\sigma/10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{s}$		$(\sigma_{cal} - \sigma_{exp})/\sigma$ /%
	实验结果	计算结果	
1	9.800 6	8.430 3	13.9
2	3.265 3	3.515 1	7.6
3	1.898 0	2.095 5	10.4

为了分析孔隙率 Φ 、曲线分形维数 D_T 和孔面积分形维数 D_f 对声波在纤维多孔金属中传播时流阻率的影响, 分别取 $D_T = 1.14$ 以及 $D_f = 1.5$, 计算了流阻率随孔隙率的变化曲线, 如图 8 所示。由图 8a 可见, 声波在纤维多孔金属中传播时, 当声波传播的孔通道曲线分形维数 D_T ($D_T = 1.14$) 一定时, 材料的流阻率随着孔隙率的增大而减小, 当孔隙率一定时, 流阻率随着孔面积分形维数的增大而减小。这是因为当孔面积分形维数和孔隙率增大时, 纤维介质中总的孔隙面积也会增大, 因此流阻率减小。在图 8b 中, 当孔面积分形维数 D_f ($D_f = 1.5$) 一定时, 材料的流阻率随着孔隙率的增大而减小, 而孔隙率一定时, 流阻率随着曲线分形维数的增大而增大。孔隙率和孔面积分形维数一定, 当纤维多孔金属的曲线分形维数增大时, 声波在介质中传播的路径更曲折, 因此流阻率会增大。

通过本文所建立的流阻率分形理论模型, 可以对纤维多孔金属吸声材料的微观孔隙结构进行设



(a) σ 随 Φ 及 D_f 的变化



(b) σ 随 Φ 及 D_T 的变化

图 8 σ 随 Φ 及分形维数的变化

计。根据流阻率与孔隙率的变化关系,可在制备纤维吸声材料试样时通过控制孔隙率的大小来获得相应的流阻率变化范围。另外,通过纤维丝的排列可以获得所要求的纤维束尺寸和孔径,从而得到具体的孔面积分形维数,进而估算出流阻率大小。最后,可以对烧结制备纤维吸声材料时每层纤维的疏密程度进行控制,以得到声波在吸声材料中的传播路径,通过流阻率与曲线分形维数的变化关系可以预估流阻率的大小。在实际应用中,可以根据具体降噪的工况要求,按照上述方法来设计相应的纤维多孔金属吸声材料。

6 结 论

本文基于分形几何理论和流体力学理论对声波在纤维多孔金属介质中传播的流阻率进行了研究,建立了流阻率分形模型。模型理论计算值与实验测试值的最大偏差为 13.9%,最小偏差为 7.6%,平均偏差为 10.6%,验证了理论模型的可靠性。同时,在此模型的基础上对相关参数的影响进行了研究,纤维多孔金属材料流阻率随着孔隙率的增大而减小;材料的孔隙率和曲线分形维数一定时,流阻率随着孔面积分形维数的增大而减小;当孔隙率和孔面积分形维数一定时,流阻率随着曲线分形维数的增

大而增大。本文研究工作为纤维多孔金属吸声材料的微观结构设计提供了一定的依据。

参考文献:

[1] 卢天健,何德坪,陈长青,等. 超轻多孔金属材料的多功能特性及应用 [J]. 力学进展, 2006, 36(4): 517-535.
LU Tianjian, HE Deping, CHEN Changqing, et al. The multi-functionality of ultra-light porous metals and their applications [J]. Advances in Mechanics, 2006, 36(4): 517-535.
[2] ALLARD J F. Propagation of sound in porous media [M]. London, UK: Elsevier Applied Science, 1993: 20-22.
[3] DELANY M E, BAZLEY E N. Acoustical properties of fibrous materials [J]. Applied Acoustics, 1970, 3 (2): 105-116.
[4] BIES D A, HANSEN C H. Flow resistance information for acoustical design [J]. Applied Acoustics, 1980, 13(5): 357-391.
[5] 朱华,姬翠翠. 分形理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2011: 1-8.
[6] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature [M]. New York, NJ, USA: W. H. Freeman and Company, 1982: 23-57.
[7] WHEATCEFT S W, TYLER S W. An explanation of scale-dependent dispersivity in heterogeneous aquifers using concepts of fractal geometry [J]. Water Resource Research, 1988, 24(4): 566-578.
[8] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces [J]. Journal of Tribology, 1990, 112(2): 205-216.
[9] HAPPEL J, BRENNER H. Low Reynolds number hydrodynamics, mechanics of fluids and transport process [M]. Boston, MA, USA: Martinus Nejhoff, 1983: 23-57.
[10] DENN M M. Process fluid mechanics [M]. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1980: 35-37.
[11] YU Boming, CHENG Ping. A fractal permeability model for bi-dispersed porous media [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2002, 45 (14): 2983-2993.
[12] ZHANG Bo, CHEN Tianning. Calculation of sound absorption characteristics of porous sintered fiber metal [J]. Applied Acoustics, 2009, 70(2): 337-346.

(编辑 武红江)